МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
25.05.2023

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.24 Уравнения математической физики

1. Код и наименование направления подготовки: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки: Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении, Математическое и компьютерное моделирование

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: проф., д.ф.-м.н. Глушко А.В.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол № 0500-06 от 25.05.2023

8. Учебный год: 2025/ 2026 Семестр(ы): 5, 6

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление студентов с основными понятиями и методами теории уравнений математической физики на основе критического анализа и синтеза информации, полученной как в ходе изучения курса Уравнений математической физики, так и в предшествующих базовых курсах;

- сформировать навыки анализа задачи для уравнений математической физики ситуацию как системную, выявляя ее составляющие: уравнение, область, граничные и начальные условия и связи между ними;

- выработка навыков решений стандартных краевых задач математической физики на основе применения фундаментальных знаний, полученных как в ходе освоения курса уравнений математической физики, так и при изучении других математических и естественно-научных дисциплин;

- дать качественные математические и естественно-научные знания, востребованные обществом с целью выработки устойчивых навыков применения методов решения задач для уравнений математической физики;

Задачи учебной дисциплины:

- сформировать умение классифицировать и приводить к каноническому виду уравнения математической физики трех основных типов;

- сформировать навыки применения основных методов исследования решений начальных и начально-краевых задач для уравнений математической физики;

- способность применения методов математического моделирования с использованием задач математической физики при изучении реальных процессов и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Уравнения математической физики» относится к Блоку 1 обязательной части, т.е. является обязательной дисциплиной для изучения обучающимися.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, дискретная математика.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств.

Дисциплина является предшествующей для курсов Численные методы, Теория чисел, Методы оптимизаций и всех специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1	Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними	Знать: как анализировать проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связь между ними. Уметь: анализировать проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связь между ними. Владеть: методами позволяющими анализировать проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связь между ними.
		УК-1.2	Используя логико-методологический инструментарий, критически оценивает надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области	Знать: как используя логико-методологический инструментарий, критически оценивать надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области. Уметь: используя логико-методологический инструментарий, критически оценивать надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области. Владеть: методами позволяющими используя логико-методологический инструментарий, критически оценивает надежность источников информации, современных концепций философского и социального характера в своей предметной области.
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; классификацию уравнений в частных производных; основные методы доказательства математических утверждений Уметь: формулировать постановки основных задач математической физики, в том числе в пространствах обобщенных функций, знать основные методы построения обобщенных функций; формулировать и доказывать теоремы существования, единственности, корректной постановки задач для уравнений с частными производными Владеть: теоретическими подходами к созданию математических моделей в области уравнений с частными производными; навыками работы в информационных современных системах
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических	Знать: зарубежную и отечественную литературу в области уравнений в частных производных, общие формы

	процессов, численных методов, теоретической механики в профессионально й деятельности		и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	закономерности теории уравнений с частными производными Уметь: грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
		ОПК-1.3.	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методы решения задач в области уравнений с частными производными Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: Методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области уравнений с частными производными

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 7 / 252 .

Форма промежуточной аттестации: **Зачет – 5 семестр, Экзамен – 6 семестр**

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			5 семестр	6 семестр
Контактная работа		140	72	68
	лекции	70	36	34
	практические	70	36	34
	лабораторные	-	-	-
	курсовая работа	-	-	-
Самостоятельная работа		76	45	31
Промежуточная аттестация		36	-	36
Итого:		**252**	**117**	**135**

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	Классификация уравнений в частных производных второго порядка.	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.
		Вывод основных уравнений математической физики, постановка граничных условий.	
		Корректная постановка задач математической физики.	
		Системы типа Ковалевской. Теорема Ковалевской.	
1.2	Введение в теорию обобщенных функций	Пространство основных функций D. Пространство обобщенных функций D'. Непрерывные операции в D и D'.	
		Пространство основных функций S. Пространство обобщенных функций медленного роста S'	

1.3	Преобразование Фурье	Преобразование Фурье в S и S'. Его свойства.	http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=cat&id=28 *Электронный курс УМФ* https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460
1.4	Фундаментальное решение	Фундаментальное решение. Фундаментальные решения для конкретных операторов в частных производных.	
1.5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	Прямое произведение обобщенных функций и его свойства.	
		Свертка обобщенных функций и ее свойства.	
		Решение уравнений в частных производных с правой частью в обобщенных функциях.	
1.6	Уравнения гиперболического типа	Задача Коши для волнового оператора. Запаздывающие потенциалы.	
		Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Интеграл энергии. Единственность решения. Непрерывная зависимость решений от начальных данных.	
1.7	Уравнения параболического типа	Задача Коши для оператора теплопроводности. Тепловые потенциалы.	
		Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Следствие о единственности решения.	
18	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции. Основные свойства гармонических функций. Принцип максимума и минимума, теорема о среднем.	
		Преобразования инверсии и Кельвина. Теоремы единственности решения краевых задач для уравнения Пуассона	
		Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Свойства функции Грина.	
		Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	
		Некоторые сведения о решениях краевых задач для уравнения Пуассона. Представления решений краевых задач для уравнения Пуассона через функции Грина соответствующих задач для уравнения Лапласа. Ньютоновы потенциалы.	
		Теорема Рисса. Пространства $W^s(\Omega)$ и $W_0^s(\Omega)$. Обобщенные решения краевых задач для уравнения Пуассона в ограниченных областях.	
		2. Практические занятия	
2.1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Контрольная работа	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=cat&id=28 *Электронный курс УМФ* https://edu.vsu.ru/course/vie
		Корректная постановка задач математической физики.	
2.2	Введение в теорию обобщенных функций	Пространство основных функций D. Пространство обобщенных функций D'. Непрерывные операции в D и D'.	
		Пространство основных функций S. Пространство обобщенных функций медленного роста S'.	
2.3	Преобразование Фурье	Преобразование Фурье в S и S'. Его свойства. Контрольная работа	
2.4	Фундаментальное решение	Фундаментальное решение. Фундаментальные решения для конкретных операторов в частных производных.	
2.5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	Прямое произведение обобщенных функций и его свойства.	
		Свертка обобщенных функций и ее свойства. Контрольная работа	
		Решение уравнений в частных производных с правой частью в обобщенных функциях.	
2.6	Уравнения	Задача Коши для волнового оператора.	

	гиперболического типа	Запаздывающие потенциалы.	w.php?id=3460
		Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Интеграл энергии. Единственность решения. Непрерывная зависимость решений от начальных данных.	
2.7	Уравнения параболического типа	Задача Коши для оператора теплопроводности. Тепловые потенциалы.	
		Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Следствие о единственности решения.	
2.8	Уравнения эллиптического типа	Гармонические функции. Основные свойства гармонических функций. Принцип максимума и минимума, теорема о среднем.	
		Преобразования инверсии и Кельвина. Теоремы единственности решения краевых задач для уравнения Пуассона	
		Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Свойства функции Грина.	
		Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	
		Некоторые сведения о решениях краевых задач для уравнения Пуассона. Представления решений краевых задач для уравнения Пуассона через функции Грина соответствующих задач для уравнения Лапласа. Ньютоновы потенциалы.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	14	8		5	27
2	Введение в теорию обобщенных функций	4	6		10	20
3	Преобразование Фурье	4	6		10	20
4	Фундаментальное решение	4	4		10	18
5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	10	12		10	32
6	Уравнения гиперболического типа	8	8		10	26
7	Уравнения параболического типа	8	8		10	26
8	Уравнения эллиптического типа	18	18		11	47
	Промежуточная аттестация					36
	Итого:	70	70		76	252

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины: В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Уравнения математической физики» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях.

Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекций обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

4. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru .

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 76 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Уравнения математической физики» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (коллоквиумам и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятия обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (5 семестр – зачет, 6 семестр – экзамен)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (5 семестр – зачет, 6 семестр – экзамен).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. . // «Университетская библиотека online»:

	электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=cat&id=28
2	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
3	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
4	Глушко В.П. Курс уравнений математической физики с использованием пакета Mathematica. Теория и технология решения задач : учеб. пособие / В.П. Глушко, А.В. Глушко. – СПб : Лань, 2010. – 320 с. илл. (+CD).

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
3	Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с . . / www.kuchp.ru
4	Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с . . / www.kuchp.ru
5	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с. / www.kuchp.ru
6	Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка эллиптического типа / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, Л.В. Безручкина. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 92 с. . / www.kuchp.ru
7	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=view_file&lid=470

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linex, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc, Math,* браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория со специализированной мебелью

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа № 1
2	Введение в теорию обобщенных функций	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, тестовые задания, коллоквиум № 1
3	Преобразование Фурье	ОПК-1	ОПК-1.2, ОПК-1.3	Домашние задания, коллоквиум № 1
4	Фундаментальное решение	ОПК-1	ОПК-1.2	Домашние задания, коллоквиум № 1
5	Построение обобщенных решений с помощью свертки	ОПК-1	ОПК-1.1	Домашние задания, коллоквиум № 1
Промежуточная аттестация Форма контроля - Зачет				Зачет выставляется при успешной сдачи одной контрольной работы и первого коллоквиума
6	Уравнения гиперболического типа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, коллоквиум № 2
7	Уравнения параболического типа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, коллоквиум № 2
8	Уравнения эллиптического типа	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	Домашние задания, коллоквиум № 2
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

<u>Домашние задания:</u>

<u>По теме 1.</u> <u>Постановка основных задач и классификация уравнений с частными производными</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 56.4; 56.5; 56.6; 57.4; 57.5; 57.6; 58.2; 58.3; 58.4

<u>По теме 2. Введение в теорию обобщенных функций</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 63.4; 63.5, 63.6; 64.2; 64.3; 64.4; 65.4; 65.5; 65.7; 65.8; 66.3; 66.4; 66.6;.66.7;.66.8; 67.2; 67.3; 67.4; 67.5; 67.6; 67.8; 67.9

<u>По теме 3 Преобразование Фурье</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 75.4; 75.5; 75.6; 75.7; 75.8; 75.9; 76.2; 76.3; 76.5; 76.6; 767.7

<u>По теме 4. Фундаментальное решение</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 77.2; 78.2; 78.3; 78.4; 78.5; 78.6; 78.7

<u>По теме 5. Построение обобщенных решение с помощью свертки</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 71.3; 71.6; 71.7; 71.8

<u>По теме 6. Уравнения гиперболического типа</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 79.2; 79.3; 79.6; 79.7; 79.8; 79.9; 79.10; 79.11; 79.12; 80.4; 80.5; 80.6; 81.2; 81.4; 81.6; 81.7; 81.8

<u>По теме 7. Уравнения параболического типа</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 82.1; 82.4; 82.6; 82.7; 82.8; 83.1; 83.2; 83.4; 83.5; 83.6; 83.7; 84.2; 84.3; 84.4

<u>По теме 8. Уравнения эллиптического типа</u>

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 85.1; 85.3; 85.4; 85.5; 85.6; 86.2; 86.3; 86.4

Перечень вопросов к зачету: оценка знаний при проведении зачета ведется с учетом результата работы в ходе семестра, результатом выполнения контрольной работы и сдачи первого коллоквиума.

Примерный перечень задач для контрольной работы:

1. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 .$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 .$$

3. Используя формулу, связывающую обычную и обобщенную производные, вычислить обобщенную производную от $\mathrm{sgn}(x^2-1)$.

4. Используя формулу Лейбница вычислить обобщенную производную от функции

$$y(x)=\begin{cases}\sin x,\ x<-1;\\ 1,\ -1\le x\le 1;\\ \cos x,\ x>1.\end{cases}$$

5. Пусть $\varphi(x)\in S(\mathbb{R})$. Выяснить, сходится ли последовательность $\frac{1}{k}\varphi(\frac{x}{k})$ в $S(\mathbb{R})$.

Примерный перечень вопросов

1	Классификация уравнений второго порядка в точке, их приведение к каноническому виду.
2	Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Классификация, замена переменных, формулы связи между коэффициентами.
3	Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Гиперболический тип уравнения.
4	Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Эллиптический и параболический типы уравнений.
5	Постановка начальных, краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных.
6	Вывод уравнения Даламбера (волновое уравнение). Поперечные колебания струны. Граничные условия для струны.
7	Вывод уравнения Даламбера (волновое уравнение). Продольные колебания упругого стержня. Граничные условия для стержня.
8	Вывод уравнения распространения тепла в изотропном твердом теле. Условия на границе. Стационарное уравнение.
9	Корректная постановка задач математической физики. Пример Адамара.
10	Определение системы типа Ковалевской. Примеры. Постановка задачи Коши для системы типа Ковалевской. Определение аналитической функции многих действительных переменных. Формулировка теоремы Ковалевской (без доказательства).
11	Пример Ковалевской.
12	Пространство основных функций D.
13	Непрерывные операции в D.
14	Пространство обобщенных функций D'. Пример функционала из D'.
15	Носитель и нулевое множество обобщенной функции. $\delta-$функция Дирака. $\delta-$функция Дирака как предел последовательности основных функций.
16	Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Лемма дю-Буа-Реймонда. Доказательство сингулярности $\delta-$ функции Дирака.
17	Формулы Сохоцкого.
18	Непрерывные операции в D'. Операция дифференцирования (с примером). Линейная замена переменной.
19	Непрерывные операции в D'. Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию (с двумя примерами).
20	Обобщенные производные по Соболеву. Пример на вычисление обобщенной производной кусочно-дифференцируемой функции.
21	Свойства обобщенных производных: линейность, непрерывность, бесконечная дифференцируемость, независимость от порядка дифференцирования, формула Лейбница дифференцирования произведения, нерастекание носителя при обобщенном дифференцировании.
22	Прямое произведение обобщенных функций. Техническая лемма, первое утверждение.
23	Прямое произведение обобщенных функций. Техническая лемма, второе утверждение. Доказательство принадлежности $f(x)g(y)\in D'(\mathbb{R}^{n+m})$.

24	Коммутативность прямого произведения. Лемма о плотности.
25	Остальные свойства прямого произведения.
26	Понятие свертки. Два примера существования свертки обычных функций.
27	Свертка обобщенных функций. Определение.
28	Свойства свертки: линейность, коммутативность, дифференцируемость. Пример несуществования свертки обобщенных функций.
29	Свертка с финитным функционалом.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:
Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы и проведением коллоквиумов.

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем из пяти заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий можно пользоваться любой литературой, ограничение по времени 90 минут.

В ходе проведения коллоквиумов (№ 1 – 5 семестр, части № 2 - № 3 6 семестр) обучающемуся выдается программа коллоквиума, бланк ответа и билет с заданием. Ответ на вопрос КИМ должен быть дан за 60 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 240 минут.

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения с частными производными» проводится в форме зачета и экзамена.

При промежуточной аттестации 5 семестра уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками ***«зачтено»*** и ***«незачтено»***, которые формируются следующим образом:

Контрольная работа – по баллу за каждую правильно решенную из 5 задач контрольной работы. При получении не менее 3 баллов выставляется оценка «зачтено».

Коллоквиум № 1 – 5 баллов за полный ответ по вопросу КИМ. Баллы от 0 до 5 выставляются по критериям оценивание компетенций из п. 19.2 (0 – 2 балла по критериям оценивания на «неудовлетворительно», 3 балла – «удовлетворительно», 4 балла – «хорошо», 5 баллов – «отлично»). Возможно назначение баллов с точностью до десятых. При получении не менее 50% баллов (от 2,5 и выше) выставляется оценка «зачтено». Оценка в баллах сохраняется для дальнейшего использования при формировании оценки в 6 семестре.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
«Зачтено» выставляется студенту, который прочно усвоил предусмотренный программный материал; правильно, аргументировано ответил на все вопросы, с приведением примеров; показал глубокие систематизированные знания, владеет приемами рассуждения и сопоставляет материал из разных источников: теорию связывает с практикой, другими темами данного курса, других изучаемых предметов; без ошибок выполнил практическое задание. Обязательным условием выставленной оценки является правильное решение предложенных примеров (60%) Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельной и контрольной работы, систематическая активная работа на лекционных и практических занятиях.	**«зачтено»**
«Не зачтено» Выставляется студенту, который не справился с 50% вопросов и заданий билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем.	**«Не зачтено»**

Промежуточная аттестация 6 семестра по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень теоретических вопросов:

Часть 2

1	Пространство основных функций S. Сходимость в S. Вложение D в S.
2	Непрерывные операции в S.
3	Пространство обобщенных функций медленного роста S'. Сходимость в S'. Вложение S' в D'.
4	Непрерывные операции в S'.
5	Теорема Л.Шварца. Пример обобщенной функции медленного роста.
6	Финитный функционал из D'. Плотность D в S. Включение D'_0 в S'.
7	Преобразование Фурье на S. Теорема о взаимно однозначном отображении преобразованием Фурье пространства S на себя. Следствие.
8	Преобразование Фурье на пространстве S'.
9	Свойства преобразования Фурье на S'. Пример. Частичное преобразование Фурье.
10	Преобразование Фурье финитного функционала.
11	Преобразование Фурье свертки.
12	Обобщенные решения уравнений в частных производных. Фундаментальное решение. Лемма о фундаментальном решении. Теорема Хёрмандера (без доказательства).
13	Построение фундаментального решения для обыкновенного дифференциального оператора. Два примера.
14	Фундаментальное решение для оператора теплопроводности.
15	Фундаментальное решение для волнового оператора при $n=3$.
16	Фундаментальное решение для оператора Лапласа при $n=3$.
17	Задача Коши для волнового уравнения. Сведение классической задачи Коши для волнового уравнения к обобщенной задаче Коши.
18	Носитель фундаментального решения волнового оператора (при $n=3$). Дополнительная теорема о свертке. Два следствия.
19	Решение обобщенной задачи Коши для волнового оператора. Теорема и следствие.
20	Объемный запаздывающий потенциал. Лемма и теорема.
21	Поверхностный запаздывающий потенциал простого слоя. Лемма и теорема.
22	Поверхностный запаздывающий потенциал двойного слоя. Решение задачи Коши для волнового

	уравнения. Формула Кирхгофа.
23	Решение классической задачи Коши для волнового уравнений при $n=1,2$.
24	Распространение волн. Принцип Гюйгенса.
25	Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Интеграл энергии. Единственность решения.
26	Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений. Непрерывная зависимость решения начально-краевой задачи от начальных данных.
27	Постановка классической задачи Коши для уравнения теплопроводности.
28	Сведение классической задачи Коши для уравнения теплопроводности к обобщенной задаче Коши.
29	Объемный тепловой потенциал. Лемма о существовании объемного теплового потенциала.
30	Объемный тепловой потенциал. Теорема об объемном тепловом потенциале.
31	Поверхностный тепловой потенциал. Лемма о существовании поверхностного теплового потенциала.
32	Поверхностный тепловой потенциал. Теорема о поверхностном тепловом потенциале.
33	Теорема о существовании решения классической задачи Коши для уравнения теплопроводности.
34	Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Теорема о максимуме и минимуме. Следствия.
35	Гармонические функции. Лемма 1.
36	Формулы Грина. Лемма 2 об интегральном представлении функции с помощью фундаментального решения оператора Лапласа.
37	Основные свойства гармонических функций
38	Утверждение 2 о бесконечной дифференцируемости гармонической функции.
39	Теорема 1 о среднем арифметическом гармонической функции
40	Теорема 2 о максимуме и минимуме гармонической функции.
41	Преобразования инверсии и Кельвина. Лемма 4 об устранимой особенности. Теорема 3 о поведении гармонической функции на бесконечности.
42	Теоремы единственности решений внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа.
43	Теорема 5 о разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
44	Теорема 6 о единственности решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа.
45	Функция Грина задачи Дирихле.
46	Свойства функции Грина.
47	Построение функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения математической физики» проводится в форме зачета и экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестр. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении зачета учитываются результаты одной контрольной работы и результаты первого коллоквиума. Для получения оценки «зачтено» на зачете в конце 5 семестра у обучающегося должны иметься или оценки «зачтено» по контрольной работе и коллоквиуму № 1 или студент должен ответить на соответствующие вопросы в ходе проведения зачета.

При проведении экзамена учитываются результаты двух коллоквиумов и учитывается выставляемая преподавателем оценка за работу в ходе практических занятий.

Если у обучающегося есть положительные оценки по двум коллоквиумам и положительная оценка работы в ходе обучения по практике, то оценка по экзамену выставляется как среднее арифметическое данных трех оценок с округление десятых долей по математическим правилам. Если обучающийся не имеет положительной оценки по какому-либо коллоквиуму или практике, или не согласен с этой оценкой, он может ответить на соответствующие вопросы в ходе экзамена.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Обучающийся не владеет основами учебно-программного материала, обнаружил пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.	**«Неудовлетворительно»**
Обучающийся владеет знаниями основного учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, справился с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "удовлетворительно" выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя. Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент знает все определения по контрольно-измерительному материалу и может решить хотя бы один практический пример	**"Удовлетворительно"**
Обучающийся полностью владеет знаниями учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные в программе задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка "хорошо" выставляется студентам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному. Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он правильно и в полном объеме ответил на все теоретические вопросы билета, но допустил погрешности в практических примерах	**"Хорошо"**
Оценка «отлично» выставляется обучающимся, обнаружившим всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоившему основную программу и знакомому с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка "отлично" выставляется студентам, усвоившим взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявившим творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. Оценка «отлично» выставляется, если студент в полном объеме и правильно ответил на все вопросы контрольно-измерительного материала (как на теоретическую, так и на практическую части)	**"Отлично"**

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) **Test1-5:**

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task1

Выберете верное утверждение

Варианты ответов:

1. $D(R^n) \subset S(R^n)$,
2. $S(R^n) \subset D(R^n)$.
3. $S'(R^n) \subset D(R^n)$

Ответ: 1).

!Task2

Пусть

$f(x) \in D'\left(R^1\right),\ a(x) \in C^\infty\left(R^1\right)$.

Верна ли следующая формула (варианты ответов):

1. $\left(a\left(x\right) f\left(x\right)\right)' = a'\left(x\right) f\left(x\right) + a\left(x\right) f'\left(x\right)$
2. $\left(a\left(x\right) f\left(x\right)\right)' = a'\left(x\right) f'\left(x\right) + a\left(x\right) f'\left(x\right)$
3. $\left(a\left(x\right) f\left(x\right)\right)' = a\left(x\right) f'\left(x\right) + a'\left(x\right) f'\left(x\right)$

Ответ.

$\left(a\left(x\right) f\left(x\right)\right)' = a'\left(x\right) f\left(x\right) + a\left(x\right) f'\left(x\right)$

!Task3

Пусть $L(x, D_x)$ – линейный дифференциальный оператор. Функция $E(x) \in S'(R^n)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора $L(x, D_x)$ если

Варианты ответа:

1) $L(x, D_x)E(x) = \delta(x)$,
2) $L(x, D_x)E(x) = 1$,
3) $L(x, D_x)E(x) = E(x)$.

Ответ: 1) $L(x, D_x)E(x) = \delta(x)$,

!Task4
Пусть $L(D_x)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $E(x)$ его фундаментальное решением, тогда решение уравнения $L(D_x)u(x) = f(x)$ задается формулой
Варианты ответа:
1) $E(x) * f(x)$,
2) $E(x) \cdot f(x)$,
3) $E(x) + f(x)$,.
Ответ: 1) $E(x) * f(x)$,

!Task5
Пусть $f(x), g(x) \in S'(R^n)$ и $g(x)$ финитна, тогда выполняются равенства (варианты ответов):
1) $F_{x\to\xi}[f(x) * g(x)] = F_{x\to\xi}[f(x)] \cdot F_{x\to\xi}[g(x)]$,
2) $F_{x\to\xi}[f(x) * g(x)] = \dfrac{F_{x\to\xi}[f(x)]}{F_{x\to\xi}[g(x)]}$,
3) $F_{x\to\xi}[f(x) * g(x)] = F_{x\to\xi}[f(x)] + F_{x\to\xi}[g(x)]$,

Ответ 1) $F_{x\to\xi}[f(x) * g(x)] = F_{x\to\xi}[f(x)] \cdot F_{x\to\xi}[g(x)]$,

Задания открытого типа (короткий текст): !Task6-10

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task6 **Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

Множество бесконечно дифференцируемых функций которые вместе со всеми своими производными на бесконечности убывают быстрее чем $|x|^{-m}$, где m – произвольное натуральное число называют пространство функций .... роста
!Ответ
медленного

!Task7
Пусть $f(x) \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$, тогда действие $F_{x\to\xi}[f(x)]$ на $\varphi(\xi)$ определяемое по следующей формуле: $(F_{x\to\xi}[f(x)], \varphi(\xi)) = (f(x), F_{\xi\to x}[\varphi(\xi)])$ называется .... преобразование Фурье функции $f(x)$,
!Ответ
обобщенное
обобщенным

!Task8

Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ является уравнением ………….. типа:

Решение. Дифференциальное уравнение с частными производными, в случае двух независимых переменных имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=F(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y})\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ -

это уравнение эллиптического типа, так как $D=b^2-ac=0^2-1\cdot 1=-1<0$, здесь $a=1, b=0, c=1,$

!Ответ
эллиптического
!Task9
Задача

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t),\ x\in R^n,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ x\in R^n.\end{cases}$$

называется задачей Коши для ……………. уравнения
!Ответ
волнового
гиперболического

!Task9
Задача

$$\begin{cases}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t),\ x\in R^n,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in R^n.\end{cases}$$.

называется задачей Коши для уравнения ………..

!Ответ
теплопроводности
параболического

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Дисциплина Б1.О.24 Уравнения математической физики

Профиль подготовки Математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении, Математическое и компьютерное моделирование

Форма обучения Очная

Учебный год 2025/2026

Ответственный исполнитель
Зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор ____________ А. В. Глушко __.__ 20__

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП
по направлению ____________ М.И. Каменский __.__ 20__

Куратор ООП
по направлению ____________ С.А. Шабров __.__ 20__

Начальник отдела обслуживания ЗНБ _________ ___________ __.__ 20__

Программа рекомендована НМС математического факультета,
протокол № 0500-06 от 25.05.2023